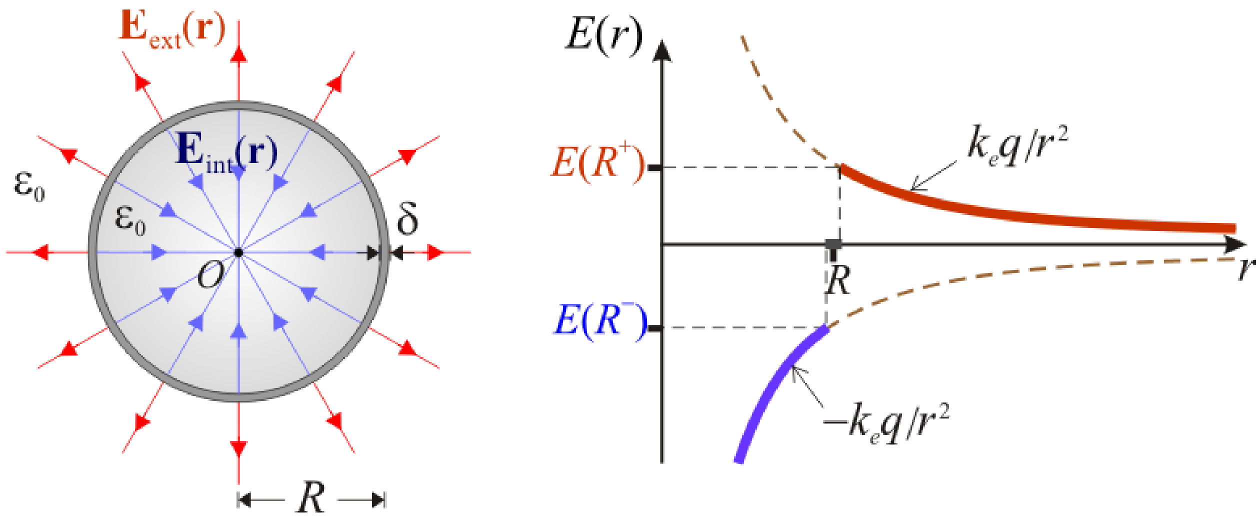
1 Enunciado

Un corteza esférica de un material conductor ideal, tiene un radio R y un espesor δ, tal que $\delta \ll R$, de manera que puede considerarse como una superficie esférica Σ. Realizando una serie de medidas tanto en el exterior de la corteza (donde no hay otras cargas próximas), como en el espacio interior delimitado por Σ, se determina que hay un campo eléctrico radial cuyas líneas se cortan en el centro O de la superficie esférica conductora:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\mathbf{u}_r(\mathbf{r}) = \begin{cases} -k_e\,q\,\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,; & \text{si} \quad |\mathbf{r}| < R^- = R - \frac{\delta}{2} \\ k_e\,q\,\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,; & \text{si} \quad |\mathbf{r}| > R^+ = R + \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

(con $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$)

1. Indique qué distribuciones de carga eléctrica producen dicho campo eléctrico.
2. ¿Cómo es el potencial eléctrostático creado por dichas cargas?
3. Acciones del campo sobre un dipolo eléctrico.



2 Solución

2.1 Distribuciones de carga

2.1.1 En el interior de la corteza conductora

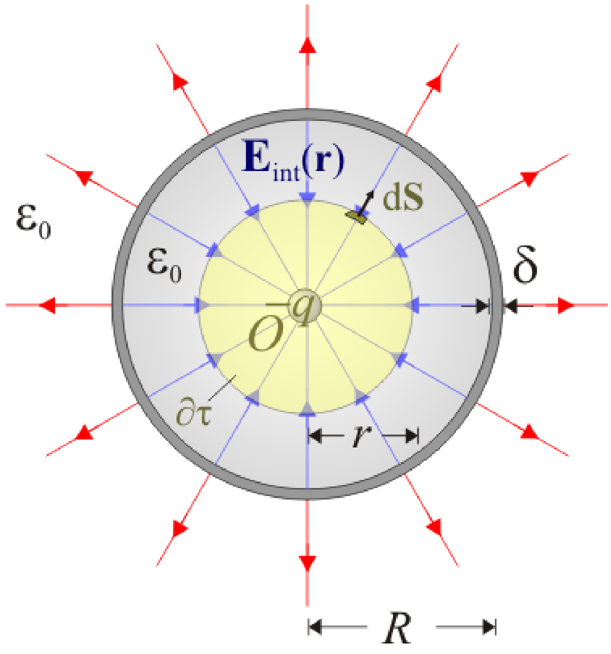
En los puntos del interior hueco de la corteza existe un campo radial cuyas líneas convergen al centro O de la corteza, y definido por la función de campo

$$\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = -k_e\,q\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,, \quad \forall\,P \quad \text{tal que} \quad |\mathbf{r}| < R^-$$

Obsérvese que esta expresión se corresponde con el **campo creado por una carga puntual de valor** $-q < 0$, situada en el centro O. Por si hubiese alguna duda, podemos aplicar la ley de Gauss en superficies cerradas contenidas en el interior de la corteza conductora:

$$\oint_{\partial\tau_{\text{int}}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\bigg|_{\tau_{\text{int}}} \qquad \partial\tau_{\text{int}}\,:\, r\,(\text{cte.}) < R^-$$

Tomemos una $\partial\tau$ esférica, con centro en O y radio arbitrario $r < R^-$ y calculemos el flujo del campo eléctrico a través de la misma. El vector elemento de superficie $\mathrm{d}\mathbf{S}$ en cada punto de $\partial\tau_{\text{int}}$ tiene la dirección y el sentido del vector $\mathbf{r}$ que determina la posición de dicho punto respecto de O; por tanto, es paralelo al campo eléctrico en dicho punto:



$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\Big]_{P\in\partial\tau_{\text{int}}} = \mathbf{E}_{\text{int}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -k_e\, q\,\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\,\mathrm{d}S = -k_e\, q\,\frac{\mathrm{d}S}{r^2}$$

Todos los puntos de los puntos de la superficie $\partial\tau$ se encuentra a la misma distancia r, por tanto es un valor constante en el integrando de la expresión que formula la ley de Gauss:

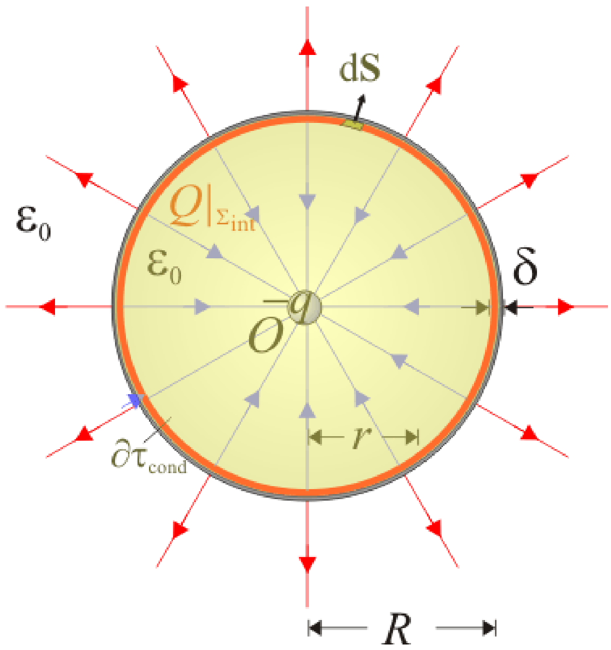
$$\oint_{\partial\tau_{\text{int}}}\mathbf{E}_{\text{int}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{k_e\, q}{r^2}\int_{\partial\tau_{\text{int}}}\mathrm{d}S = -\frac{k_e\, q}{r^2}\,4\pi\, r^2 = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q\Big]_{\tau_{\text{int}}} = -q, \quad \forall\,\partial\tau_{\text{int}} \quad \text{tal que} \quad 0 < r < R^-}$$

Es decir, la cantidad total de carga encerrada en toda superficie gaussiana esférica $\partial\tau_{\text{int}}$, con centro en O y cualquiera que sea el valor de su radio entre O y R^-, es siempre $-q$. Este resultado, junto con el carácter radial del campo eléctrico, sólo es compatible con que la única carga localizada en el interior hueco de la corteza conductora sea una puntual de valor $-q$ situada en el centro O.

2.1.2 En la cara interior de la corteza conductora

En virtud del teorema de Faraday, en la cara interior de la corteza conductora, Σ_{int}:$r = R^-$, va existir una carga inducida en cantidad opuesta a la que se haye en el hueco interior. Este resultado se obtiene de aplicar la ley de Gauss en un superficie cerrada $\partial\tau_{\text{con}}$, tal que todos sus puntos se encuentra en la corteza conducta; es decir, entre las superficies Σ_{int}:$r = R^-$ y Σ_{ext}:$r = R^+$. Por una parte, el campo eléctrico es nulo en cualquier punto de dicha región conductora de espesor δ; por otra, la carga eléctrica dentro de dicha gaussiana será igual a la carga puntual que hemos calculado en el centro Odel hueco, más la carga que hubiera distribuida en la superficie interior de la corteza conductora:



$$0 = \oint_{\partial\tau_{\text{cond}}}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\Big]_{\tau_{\text{cond}}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-q + Q\Big]_{\Sigma_{\text{int}}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{Q\Big]_{\Sigma_{\text{int}}} = -(-q) = q}$$

Como la carga puntual del centro O equidista de todos los puntos de la superficie Σ_{int}, la carga inducida en dicha superficie de distribuirá uniformemente, dando lugar a una densidad superficial de carga constante,

$$\boxed{\sigma_e\rfloor_{\Sigma_{\rm int}} = \frac{Q}{S}\bigg\rfloor_{\Sigma_{\rm int}} = \frac{q}{4\pi\,(R-\delta/2)^2} \approx \frac{q}{4\pi\,R^2} = \sigma_0}$$

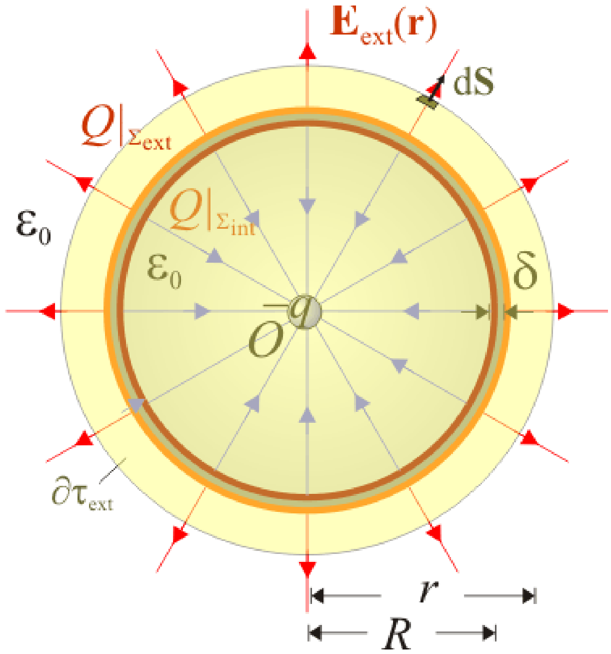
donde para obtener su valor aproximado se ha considerado que el espesor δ de la corteza de es practicamente despreciable frente a su radio R.

2.1.3 En la cara exterior de la corteza

La carga puntual $-q$ en el centro O de la corteza conductora y la carga q distribuida en la superficie interior $\Sigma_{\rm int}$ determinarían que, en virtud de la ley de Gauss, el campo eléctrico fuese nulo para todos los del espacio tales que $|\mathbf{r}| > R^-$. Por tanto, la presencia de un campo eléctrico exterior a la corteza,

$$\mathbf{E}_{\rm ext}(\mathbf{r}) = +k_e\,q\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,, \quad \forall\, P \quad \text{tal que} \quad |\mathbf{r}| > R^+$$

requiere la existencia de otra distribución de carga eléctrica. Como se sabe, éste no puede localizarse en el interior de la corteza (medio conductor), pero sí en su superficie exterior $\Sigma_{\rm ext}\,:\, r = R^+$. Pero además, la anterior expresión del campo exterior implica que no puede haber cargas en el espacio que rodea a la corteza conductora: es decir, en puntos $|\mathbf{r}| = r > R^+$. Esto puede comprobarse (¡como no!) mediante la ley de Gauss evaluada en una superficie esférica $\partial\tau_{\rm ext}$ con centro en O y radio mayor que R^+:



$$\oint_{\partial\tau_{\rm ext}} \mathbf{E}_{\rm ext}\cdot d\mathbf{S} = +\frac{k_e\,q}{r^2}\int_{\partial\tau_{\rm ext}} dS = +\frac{k_e\,q}{r^2}\,4\pi\,r^2 = +\frac{q}{\varepsilon_0}, \quad \forall\, r > R^+$$

Si el valor de este flujo es el mismo, independientemente del valor del radio (siempre que sea mayor que R^+), toda la carga q debe estar distribuida en la superficie exterior $\Sigma_{\rm ext}$; además, la simetría esférica del campo $\mathbf{E}_{\rm ext}$ está directamente relacionada con que la carga se distribuye uniformemente en la superficie conductora exterior:

$$\boxed{Q\rfloor_{\Sigma_{\rm ext}} = q} \qquad \boxed{\sigma_e\rfloor_{\Sigma_{\rm ext}} = \frac{Q}{S}\bigg\rfloor_{\Sigma_{\rm ext}} = \frac{q}{4\pi\,(R+\delta/2)^2} \approx \frac{q}{4\pi\,R^2} = \sigma_0}$$

2.2 Potencial electrostático

Como se sabe, conocido el valor de potencial en un determinado punto P_0 del espacio, $V(P_0) = V_0$, para cualquier otro punto P se tendrá:

$$V(P) = V_0 - \int_{P_0}^{P} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

Considerando que la posición del punto genérico P está determinada por el radio-vector posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, la expresión general de la función de campo puede expresarse en términos de una integral indefinida para el campo eléctrico más una constante de integración, que ha de ajustarse de manera que se verifique la condición sobre el valor conocido del potencial para $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP}_0$:

$$V(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + C, \quad \text{tal que} \quad V(\mathbf{r}_0) = V_0$$

2.2.1 En el exterior

En los puntos exteriores a la distribución de carga se tendrá:

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + C_{\text{ext}}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \geq R^+$$

Si expresamos el vector-posición $\mathbf{r}$ en términos de su módulo r y del vector unitario $\mathbf{u}_r(P)$, en la dirección y el sentido del sentido del segmento $\overrightarrow{OP}$, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r(P) \\ \\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}r\,\mathbf{u}_r(P) + r\,\mathrm{d}\mathbf{u}_r\big\rfloor_P \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = +k_e\,q\,\frac{\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = +k_e\,q\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

pues al ser $\mathbf{u}_r(P)$ un vector de módulo constante (siempre igual a la unidad), en todo punto se cumplirá que $\mathrm{d}\mathbf{u}_r\big\rfloor_P \perp \mathbf{u}_r(P)$. En consecuencia, el potencial electrostático creado en el exterior de la distribución esférica de será:

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -k_e\,q\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} + C_{\text{ext}} = k_e\,\frac{q}{r} + C_{\text{ext}}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \geq R^+$$

La constante de integración C_{ext} se ha de determinar a partir de valor del potencial en un punto del dominio de definición; es decir, un punto del exterior. Obsérvese que los puntos infinitamente alejados de la distribución pertenecen a dicho dominio, y puesto que la carga Q_0 se distribuye en una región finita (la esfera de radio R), la perturbación que produce (es decir, el campo eléctrico o el potencial electrostático) va a ser poco significativa e incluso despreciable en puntos muy alejados. En consecuencia, la constante de integración C_{ext} debe ser tal que:

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = C_{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = k_e\,\frac{q}{|\mathbf{r}|}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \geq R^+}$$

2.2.2 En la corteza conductora

En los puntos del interior del conductor ($R^- \leq |\mathbf{r}| \leq R^+$), el campo eléctrico en situación de equilibrio electrostático es nulo, por tanto:

$$V_{\text{cond}}(\mathbf{r}) = -\int \underbrace{\mathbf{E}_{\text{cond}}}_{=0}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + C_{\text{cond}} = C_{\text{cond}}, \quad \text{para} \quad R^- \leq |\mathbf{r}| \leq R^+$$

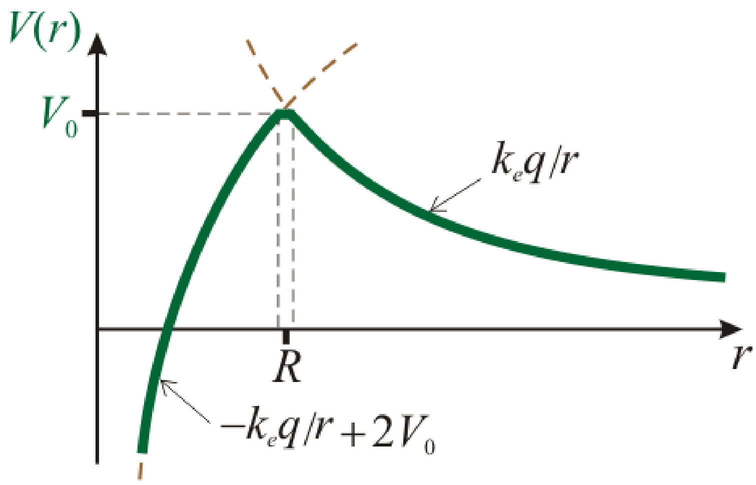
Es decir, la corteza conductora es una región equipotencial. Para determinar el valor uniforme del potencial en dicha región, exigimos la continuidad del potencial en los puntos de la cara exterior de la corteza conductora:

$$V_{\text{ext}}(r = R^+) = k_e\,\frac{q}{R^+} = C_{\text{cond}} = V_{\text{cond}}(r = R^+) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{\text{cond}}(\mathbf{r}) = k_e\,\frac{q}{R + \delta/2} \approx k_e\,\frac{q}{R} = V_0, \quad \text{para} \quad R^- \leq |\mathbf{r}| \leq R^+}$$

2.2.3 En el interior

Para determinar el potencial en el interior hueco de la corteza conductora procedemos de la misma manera que en los subapartados anteriores:



$$V_{\text{int}}(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \; + C_{\text{int}}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \leq R^-$$

Operando de manera análoga se obtiene:

$$V_{\text{int}}(\mathbf{r}) = k_e\, q \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \; + C_{\text{int}} = -k_e \frac{q}{r} \; + C_{\text{int}}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \leq R^-$$

... y para determinar la constante de integración C_{int} volvemos a exigir la continuidad del potencial, pero ahora en los puntos de cara interior Σ_{int} de la corteza:

$$V_{\text{cond}}(r = R^-) = k_e \frac{q}{R + \delta/2} = -k_e \frac{q}{R - \delta/2} + C_{\text{int}} = V_{\text{int}}(r = R^-) \quad \Longrightarrow \quad C_{\text{int}} = k_e\, q\, \frac{2\,R}{R^2 - (\delta/2)^2} \approx 2V_0$$

Por tanto, el potencial electrostático en la región interior a la corteza esférica es:

$$\boxed{V_{\text{int}}(\mathbf{r}) \approx -k_e \frac{q}{|\mathbf{r}|} + 2\,V_0, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \leq R^-}$$